In de herhaling

Breuken kun je schrijven als decimaal getal. Bijvoorbeeld:

1/2 = 0,5   1/5 = 0,2   1/16 = 0,0625

Maar veel breuken laten zich wat minder gemakkelijk decimaal uitschrijven. Zo loop bijvoorbeeld de breuk 1/28 oneindig lang door:

1/28 = 0,035714285714285714 28...

We schrijven zo'n repeterende breuk vaak als: $1/28 = 0{,}03\overline{571428}$, waarbij de streep aangeeft welke groep cijfers zich telkens herhaalt.

Je kunt van elke deler *d* bepalen uit hoeveel cijfers *r* het repeterende deel bestaat.

d	***r***	***d***	***r***	***d***	***r***	***d***	***r***	***d***	***r***
1	0	9	1	17	16	25	0	33	2
2	0	10	0	18	1	26	6	34	16
3	1	11	2	19	18	27	3	35	6
4	0	12	1	20	0	28	6	36	1
5	0	13	6	21	6	29	28	37	3
6	1	14	6	22	2	30	1	38	18
7	6	15	1	23	22	31	15	39	6
8	0	16	0	24	1	32	0	40	0

Je ziet in de tabel dat $r = 6$ voor $d = 28$ (de breuk 1/28 uit het voorbeeld). Het record onder de 40 is:

$$1/29 = 0{,}\overline{0344827586206896551724137931}$$

met een repeterend deel van 28 cijfers lang.

Merk op dat getallen die alleen maar twee- of vijfvouden van elkaar verschillen (bijvoorbeeld 11 en 22, 7 en 35 of 3 en 24) altijd een even lang repeterend deel hebben. Dat komt natuurlijk doordat in ons tientallig stelsel, 2 en 5 nooit een repeterende breuk geven ($2 \cdot 5 = 10$).

Uitrekenen voor willekeurige *d*

Om de lengte van het repeterende deel van de breuk $1/d$ te bepalen, verwijder je eerst alle factoren twee en vijf. Je houdt dan d' over. De lengte van het repeterende deel van de breuk $1/d'$ wordt bepaald door de kleinste macht van tien die precies eentje onder een d'-voud ligt. Een paar voorbeelden verduidelijken dat:

$$
\begin{array}{ll}
10^{\mathbf{1}} = 10 = \mathbf{3} \cdot 3 + 1 & d' = 3,\ r = 1,\ 1/3 = 0{,}\overline{3} \\
10^{\mathbf{2}} = 100 = \mathbf{11} \cdot 9 + 1 & d' = 11,\ r = 2,\ 1/11 = 0{,}\overline{09} \\
10^{\mathbf{6}} = 1000000 = \mathbf{7} \cdot 142857 + 1 & d' = 7,\ r = 6,\ 1/7 = 0{,}\overline{142857} \\
10^{\mathbf{3}} = 1000 = \mathbf{303} \cdot 33 + 1 & d' = 11,\ r = 2,\ 1/303 = 0{,}\overline{0033}
\end{array}
$$

Je kunt deze regel eenvoudig voor jezelf beredeneren door uit te gaan van een staartdeling. Als je start met het getal 1, dan heb je precies na r delingen (en dan heb je ook r nullen toegevoegd) onder aan de streep rest 1 over en start de cijferreeks natuurlijk weer opnieuw.

<u>Staartdeling 1 / 7</u>

```
7/1   \0,142857...
 0
 10             (1)
  7
  30            (2)
  28
   20           (3)
   14
    60          (4)
    56
     40         (5)
     35
      50        (6)
      49
       10...
```

Je kunt r, de lengte van het repeterende deel, heel eenvoudig bepalen met een klein stukje programmacode:

```
long lengte(long d) {
       long n=1;
       while(!(d%2)) d/=2; // deel alle factoren 2 weg
       while(!(d%5)) d/=5; // deel alle factoren 5 weg
       if(d==1) return(0); // niet repeterend
       long r=1;
       while((n=(10*n)%d)>1) r++; // doe de staartdeling
       return(r);
};
```

Deze berekening is te formaliseren door gebruik te maken van modulo-rekenen. Feitelijk zoek je naar een getal r waarvoor geldt:

$$10^r \equiv 1 \bmod d'$$

Omdat d' relatief priem is ten opzichte van 10 (immers, alle tweeën en vijven zijn eruit gedeeld), geldt dat r maximaal $\varphi(r)$ is, waarbij φ de zogenaamde totiënt-funtie is. Dit volgt direct uit de stelling van Euler.

Zie ook het blad “Alweer in de herhaling”

Andere talstelsels

Wij schrijven onze getallen (en dus ook de decimale breuken) in het tientallig stelsel. Dat hadden we ook anders kunnen kiezen. Sterker nog: in Engeland heeft men lang het twaalftallig stelsel gebruikt (waarvan we nog het dozijn en het gros kennen) en de Sumeriërs gebruikten in hun spijkerschrift een zestigtallig stelsel (zoals wij de uren en minuten opdelen).

Zowel het twaalf- als zestigtallig stelsel hadden als voordeel dat er meer 'mooie breuken' gevormd konden worden. In het tientallig stelsel zijn tot en met tien 1/3, 1/6, 1/7 en 1/9 repeterend; in het twaalftallig stelsel alleen 1/5, 1/7 en 1/10. Dat roept de vraag op of andere talstelsels efficiënter zouden zijn om breuken te noteren.

Het is niet zo moeilijk om de berekening uit te voeren voor andere talstelsels. Je vervangt het getal 10 in bovenstaande formule en algoritme voor b, waarbij b de basis is van het talstelsel waarmee je werkt. Inderdaad blijkt het aantal niet-repeterende breuken voor het tientallig stelsel minder te zijn dan in het twaalf- of zestigtallig stelsel.

Toch zegt dat niet alles. Niet-repeterende breuken komen namelijk maar heel erg weinig voor! Tot en met een miljoen zijn er maar 100 niet-repeterende breuken in ons tientallig stelsel. En ook in het zestigtallig stelsel zijn er maar 507.

Je kunt misschien beter kijken naar het gemiddeld aantal repeterende cijfers voor de breuken 1/1, 1/2, … tot en met 1/1000. Dan blijken de talstelsels heel dicht bij elkaar te liggen. Het zestigtallig stelsel lijkt dan wel aantrekkelijk, maar je moet ook bedenken dat je dan wel zestig symbolen uit je hoofd moet kennen in plaats van onze tien.

Tot en met $d = 1000$	10-tallig	12-tallig	60-tallig
Aantal niet-repeterende breuken	29	40	86
Gemiddeld aantal repeterende cijfers	94,3	96,7	91,1
Aantal breuken met ≤6 rep. cijfers	249	219	221

Je zou ook kunnen kijken naar het aantal nog redelijkerwijs op te schrijven repeterende breuken. Bijvoorbeeld breuken die een groep hebben van maximaal zes repeterende cijfers. Ook dan blijken de drie talstelsels redelijk vergelijkbaar.

De echte winnaar van onze wedstrijd is het dertigtallig stelsel. Die heeft maar liefst 321 getallen onder de duizend, waarvan de breuk maximaal zes repeterende cijfers heeft.

En nog een tip: blijf weg bij het tweetallige (oftewel binaire) stelsel. Computers schijnen het handig te vinden, maar je schrijft je een breuk.

Martijn Leisink @ www.wiskunstelaar.nl